岡山理科大学、2023年7月27日（木）

カルタン形式の F(R)修正重力理論

T. I., M. Taniguchi, Symmetry 14, 1830 (2022),
T. I., H. Sakamoto, M. Taniguchi, arXiv:2304.14769 [gr-qc].

広島大学先進理工系科学研究科
素粒子ハドロン研究室 稲垣知宏
https://home.hiroshima-u.ac.jp/inagaki/

素粒子宇宙物理学

ターゲット

素粒子の種類
素粒子間の相互作用
対称性とその破れ

ツール

拡張した重力理論
標準模型を越えた素粒子模型
プロトタイプモデル

宇宙の始まりと今後？
暗黒エネルギー、暗黒物質の起源？
新しい理論、模型の提案と検証

素粒子宇宙物理学

ターゲット

素粒子の種類
素粒子間の相互作用
対称性とその破れ

ツール

拡張した重力理論
標準模型を越えた素粒子模型
プロトタイプモデル

宇宙の始まりと今後？
暗黒エネルギー、暗黒物質の起源？
新しい理論、模型の提案と検証

アウトライン

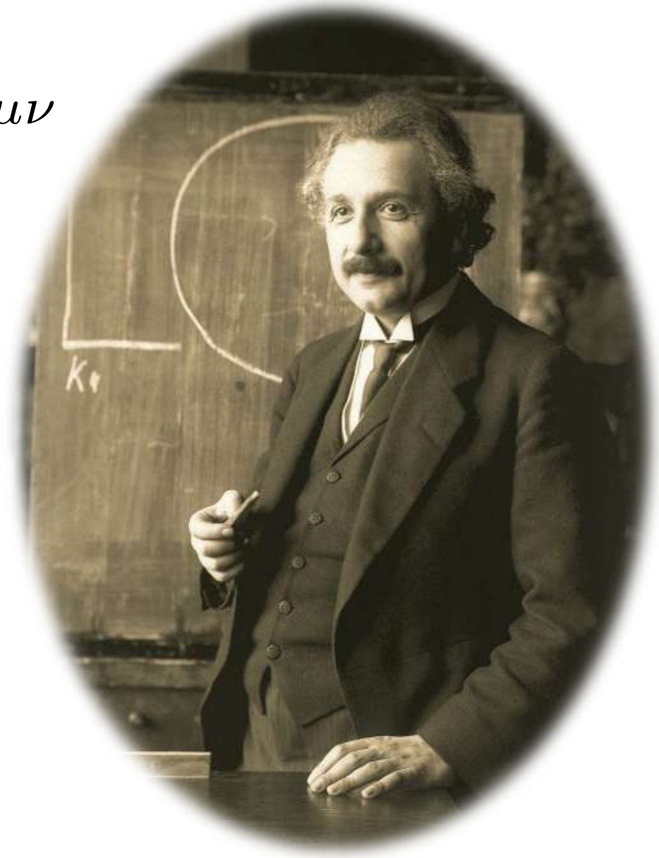
- 重力理論の修正
- カルタン形式の修正重力理論
- インフレーションと宇宙背景輻射の揺らぎ
- カルタンF(R)修正重力理論での解析
- 最後に

重力理論の修正

どうして重力理論を修正するのか？

アインシュタインの一般相対性理論

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$



どうして重力理論を修正するのか？

アインシュタインの一般相対性理論

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

- 現象論的帰結
  水星の近日点移動,
  高密度星, ブラックホール,
  重力レンズ,
  重力波,
  膨張宇宙,
  $\cdots$

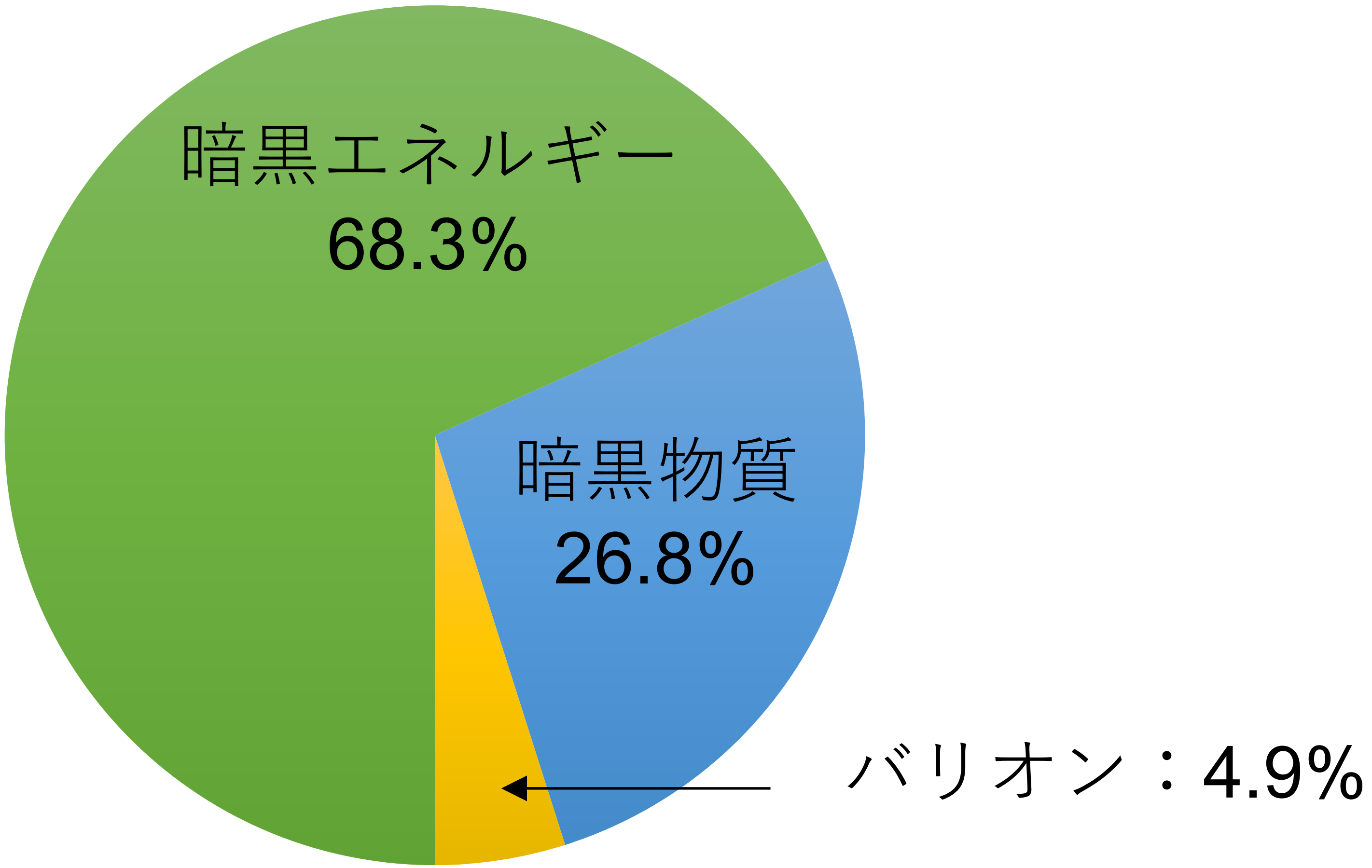
どうして重力理論を修正するのか？

アインシュタインの一般相対性理論

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

- 現象論的帰結
  水星の近日点移動,
  高密度星, ブラックホール, ←重い中性子星
  重力レンズ, ←暗黒物質
  重力波, ←始まったばかり
  膨張宇宙, ←加速膨張
  … ←短距離 < 0.01mm

暗黒エネルギーと暗黒物質



どのように修正するのか？

アインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

作用

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}(R - 2\Lambda) + S_{\mathrm{matter}}$$

どのように修正するのか？

アインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

作用

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}(R - 2\Lambda) + S_{\mathrm{matter}}$$

修正重力理論

- Rの高次項
- 非局所的な項
- ガウス・ボネット項
- トーション（捩れ）
- …

S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rept. 505, 59 (2011).

どのように修正するのか？

アインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

作用

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}(R - 2\Lambda) + S_{\mathrm{matter}}$$

素粒子物理の拡張

- ニュートリノ
- アクシオン
- 超対称性
- …

どのように修正するのか？

時空構造

- コンパクト余剰次元
- ブレイン構造
- …

アインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

作用

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}(R - 2\Lambda) + S_{\mathrm{matter}}$$

カルタン形式の修正重力理論

カルタン形式の修正重力理論

- 作用

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}(R-2\Lambda) + S_{\mathrm{matter}}$$

$$\Downarrow$$

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x eF(R) + S_{\mathrm{matter}}$$

- ラグランジアン密度
- 幾何学

リーマン幾何学

- 世界間隔

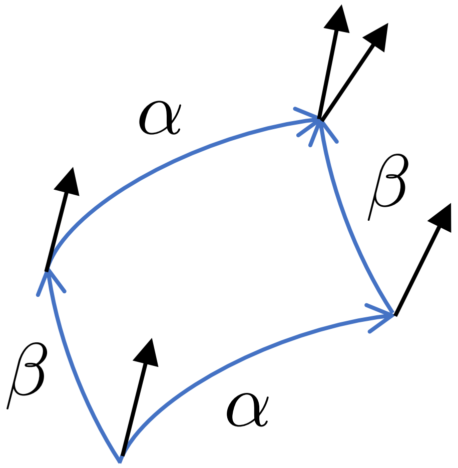
$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

←平坦なミンコフスキー時空

$$= g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2$$

$$= \sum_{\mu=0,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

- 曲率



- ベクトルの内積

$$a \cdot b = \sum_{\mu=0,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}a^\mu b^\nu = g_{\mu\nu}a^\mu b^\nu$$

カルタン形式

E. Cartan (1923), T. W. B. Kibble (1961), D. W. Sciama(1962)

- 4 脚場

$$e^{i}{}_{\mu}$$

平坦時空（局所ローレンツ系）

曲がった時空（一般座標系）

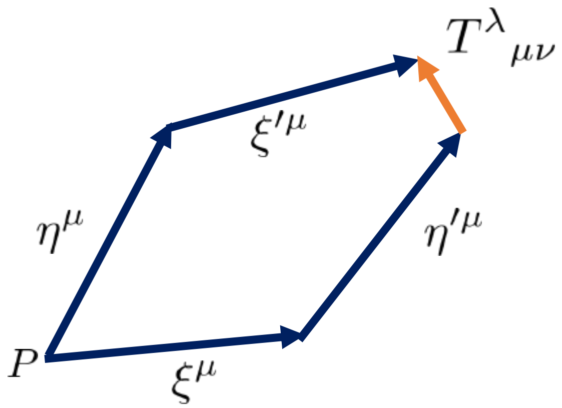
$$\underbrace{g_{\mu\nu}}_{\text{曲がった}} = \underbrace{\eta_{ij}}_{\text{平坦}} e^{i}{}_{\mu} e^{j}{}_{\nu}$$

- 共変微分と接続

$$\nabla_\nu e^k{}_\mu = \partial_\nu e^k{}_\mu + \underbrace{\omega^k{}_{l\nu}}_{\text{スピン接続}} e^l{}_\mu - \underbrace{\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}}_{\text{アフィン接続}} e^k{}_\lambda = 0.$$

- トーション（振れ）

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}$$



カルタン形式の重力理論

- 作用

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}(R - 2\Lambda) + S_{\mathrm{matter}}$$

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x eF(R) + S_{\mathrm{matter}}$$

- ラグランジアン密度
- 幾何学

運動方程式

- 修正されたアインシュタイン方程式

$$F' R^i{}_\mu - \frac{1}{2} e^i{}_\mu F(R) = {M_{\mathrm{Pl}}}^{-2} \Sigma^i{}_\mu \to R(\Sigma)$$

- カルタン方程式

$$T^\mu{}_{kl} - e_l{}^\mu T_k + e_k{}^\mu T_l + (e_k{}^\alpha e_l{}^\mu - e_k{}^\mu e_l{}^\alpha)\partial_\alpha \ln F'(R) = 0$$

$$\Rightarrow \quad T^k{}_{ij} = \frac{1}{2}(\delta^k{}_j e_i{}^\lambda - \delta^k{}_i e_j{}^\lambda)\partial_\lambda \ln F'(R(\Sigma))$$

S. Capozziello, R. Cianci, C. Stornaiolo, and S. Vignolo (2008)

スカラー・テンソル理論

T. I., M. Taniguchi, Symmetry 14, 1830 (2022)

- 場の置き換えによるスカラロン導入

$$\phi \equiv -\sqrt{\frac{3}{2}} M_{\mathrm{Pl}} \ln F'(R)$$

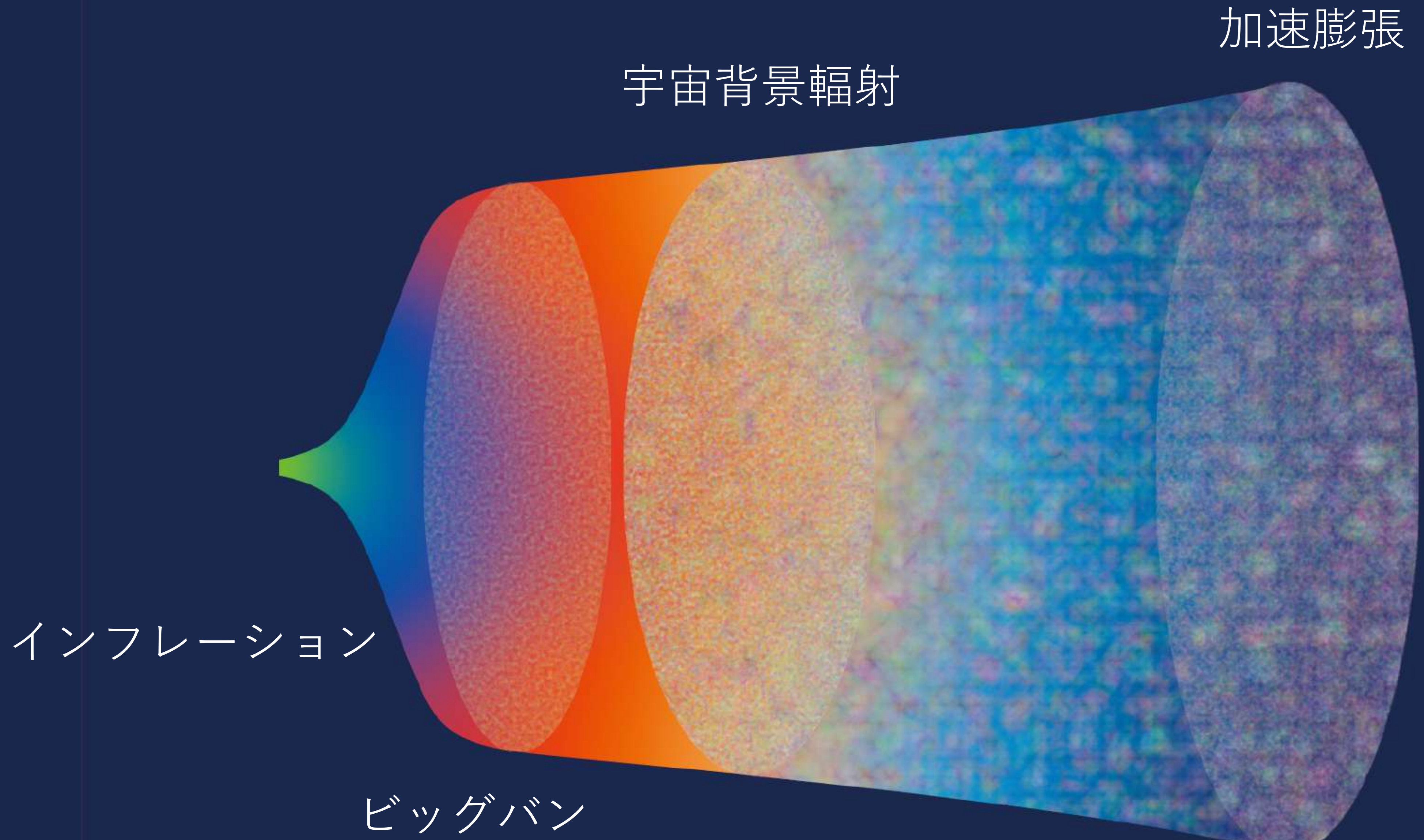
- 置き換え後の作用

$$S = \int d^4xe\left(\frac{{M_{\mathrm{Pl}}}^2}{2} R_E - \frac{1}{2}\partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi - V(\phi)\right)$$

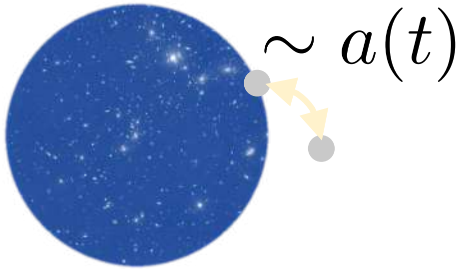
$$V(\phi) = -\frac{{M_{\mathrm{Pl}}}^2}{2}(F(R) - R)\Big|_{R=R(\phi)}$$

インフレーションと
宇宙背景輻射の揺らぎ

膨張する宇宙



加速膨張のエネルギー源



- 一様等方時空

$$ds^2 = c^2dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

- エネルギー密度

放射	$a(t) \propto t^{1/2}$
物質	$a(t) \propto t^{2/3}$
ポテンシャルエネルギー	$a(t) \propto \exp(\alpha t)$
宇宙定数	

擬ドジッター膨張

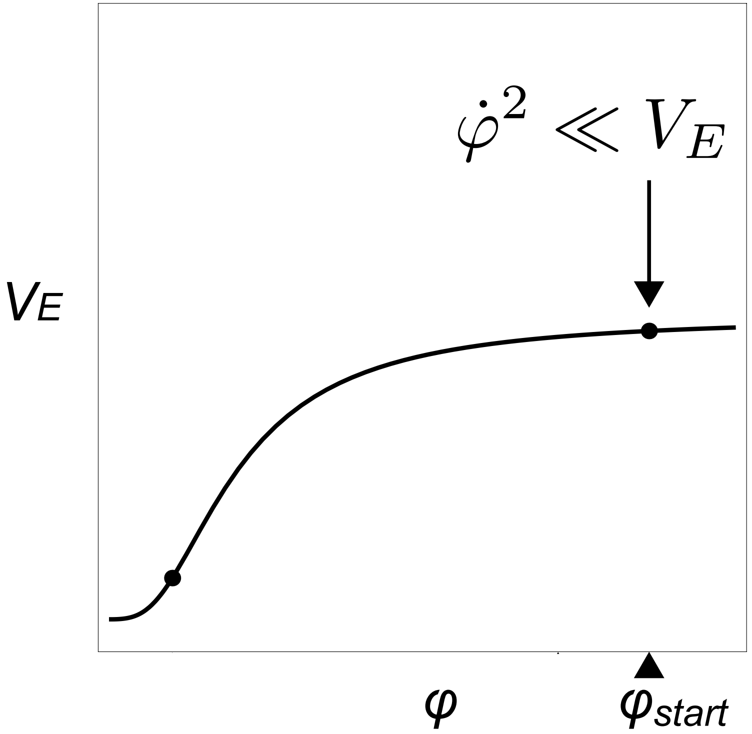
- フリードマン方程式

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V_E$$

- 仮定

$$\dot{\varphi}^2 \ll V_E$$

$$a(t+\Delta t) \sim a(t)e^{\sqrt{\frac{V_E}{3}}\Delta t}$$



A. D. Linde, Contemp. Concepts Phys. 5, 1 (1990).

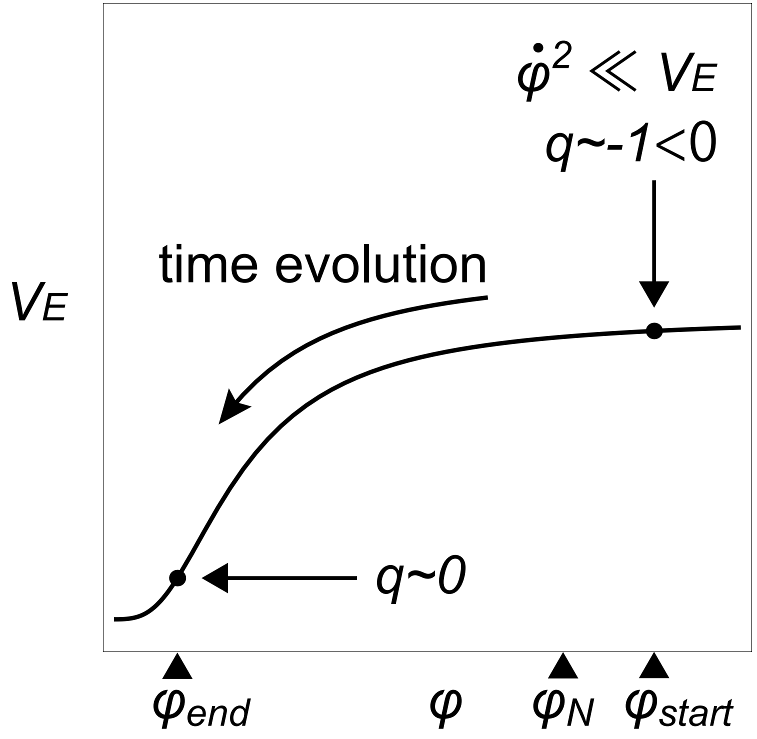
インフレーションの終焉

- 運動方程式

$$\ddot{\varphi}+3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi}=-\frac{\partial V_E}{\partial \varphi}$$

- 減速パラメーター

$$q\equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}\to 0$$



A. D. Linde, Contemp. Concepts Phys. 5, 1 (1990).

インフレーションの終焉

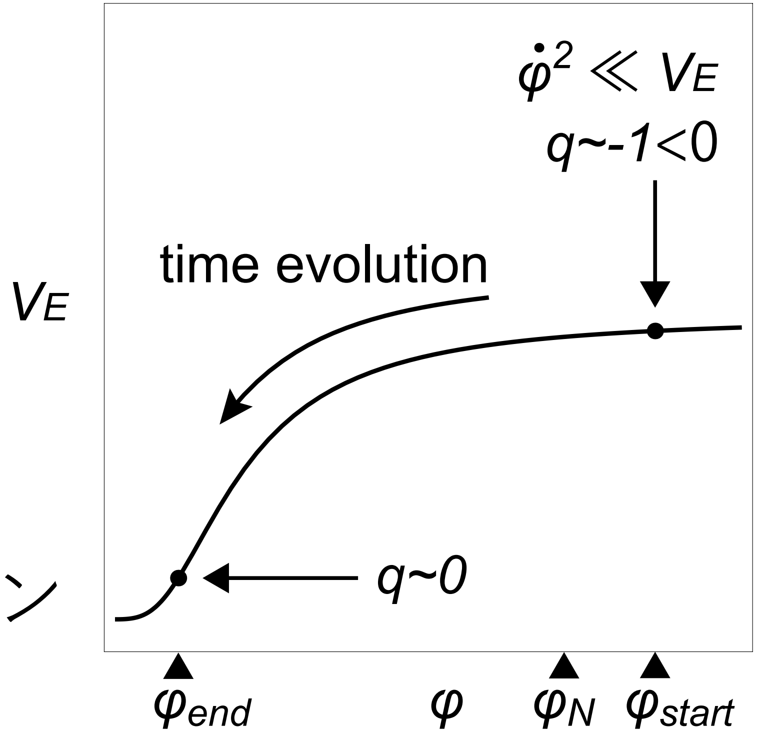
- 運動方程式

$$\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} = -\frac{\partial V_E}{\partial \varphi}$$

- 減速パラメーター

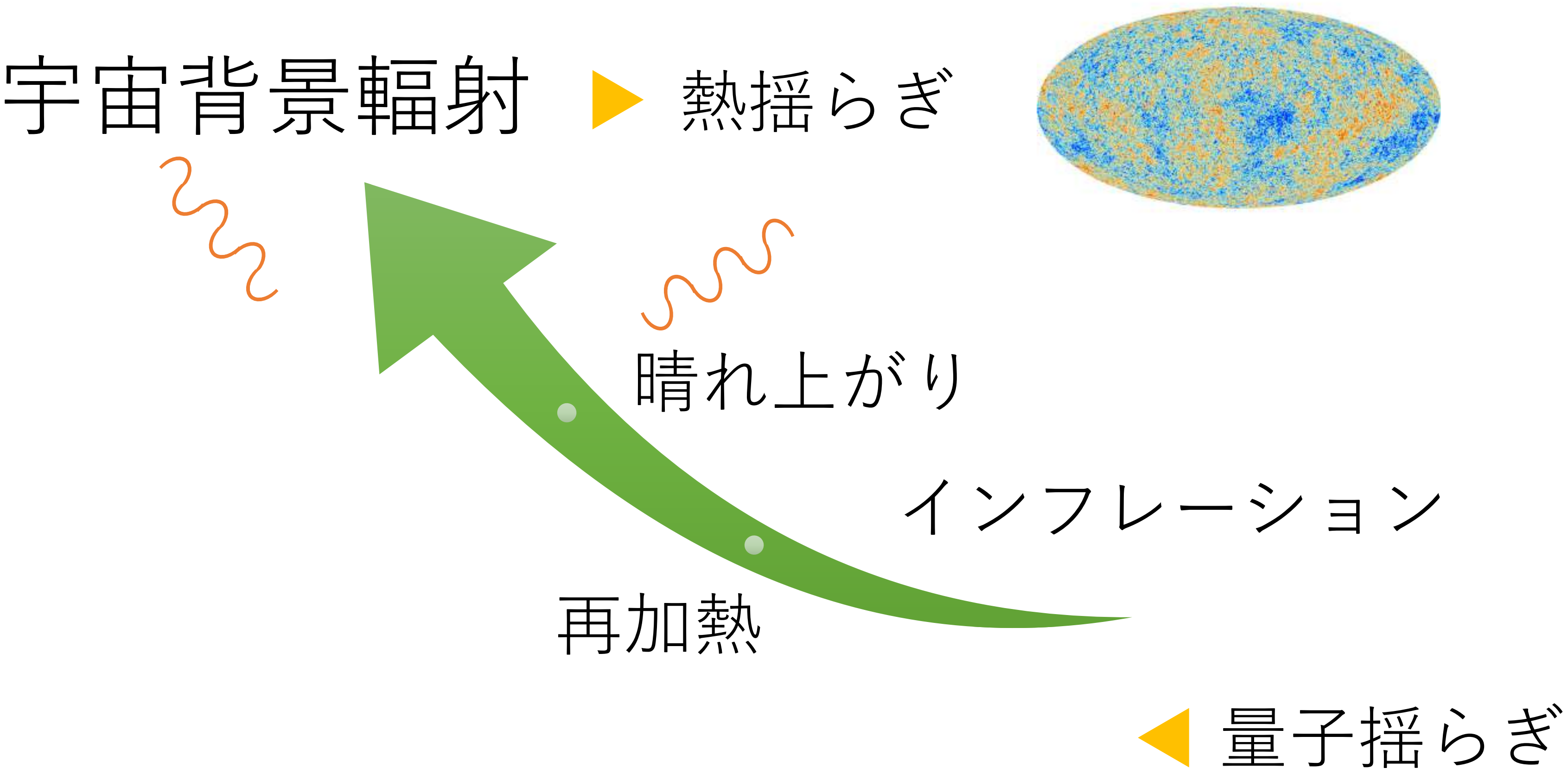
$$q \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \to 0$$

修正重力理論: スカラロン



A. D. Linde, Contemp. Concepts Phys. 5, 1 (1990).

インフレーションの痕跡



量子揺らぎ

$$\boxed{\begin{array}{l}\varphi+\delta\varphi\\ \quad\to\mathcal{P}_s(k)\end{array}}$$

スカラー型の揺らぎ
起源: スカラー場の量子揺らぎ

テンソル型の揺らぎ
起源：時空の中の量子揺らぎ

$$\boxed{\begin{array}{l}g^{\mu\nu}+\delta h^{\mu\nu}\\ \quad\to\mathcal{P}_t(k)\end{array}}$$

観測された 宇宙背景輻射の揺らぎ

- スカラー型の揺らぎ

$$\mathcal{P}_s(k) \equiv A_s \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n_s - 1}$$

- テンソル型の揺らぎ

$$\mathcal{P}_t(k) \equiv A_t \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n_t}$$

- テンソル・スカラー比

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_t(k)}{\mathcal{P}_s(k)}$$

カルタンF(R)修正重力理論での解析

T. I., H. Sakamoto, M. Taniguchi, arXiv:2304.14769 [gr-qc].

パワー則模型

E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, L. Sebastiani and S. Zerbini (2011)

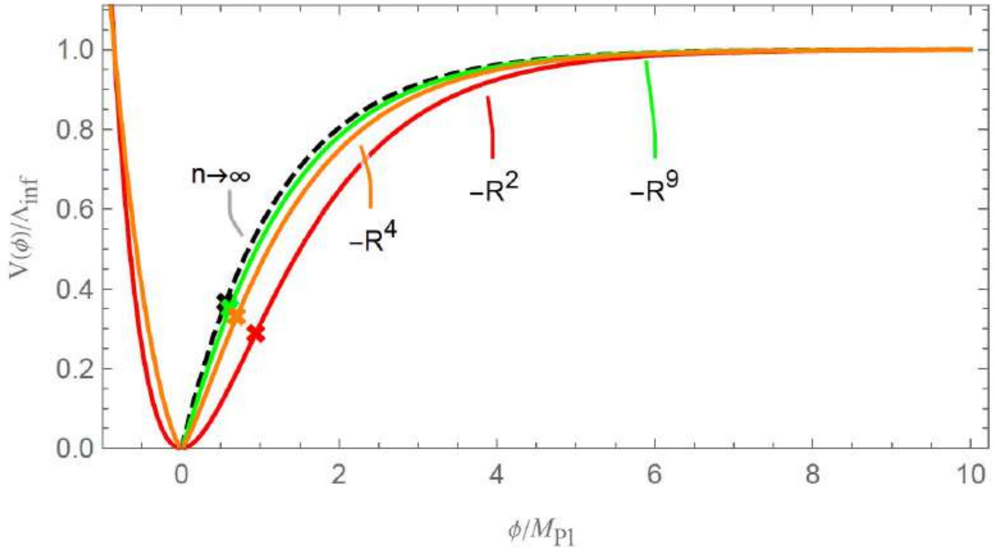
- 重力に関するラグランジアンの修正

$$F(R) = R - \frac{R^n}{(2nM^2)^{n-1}n}$$

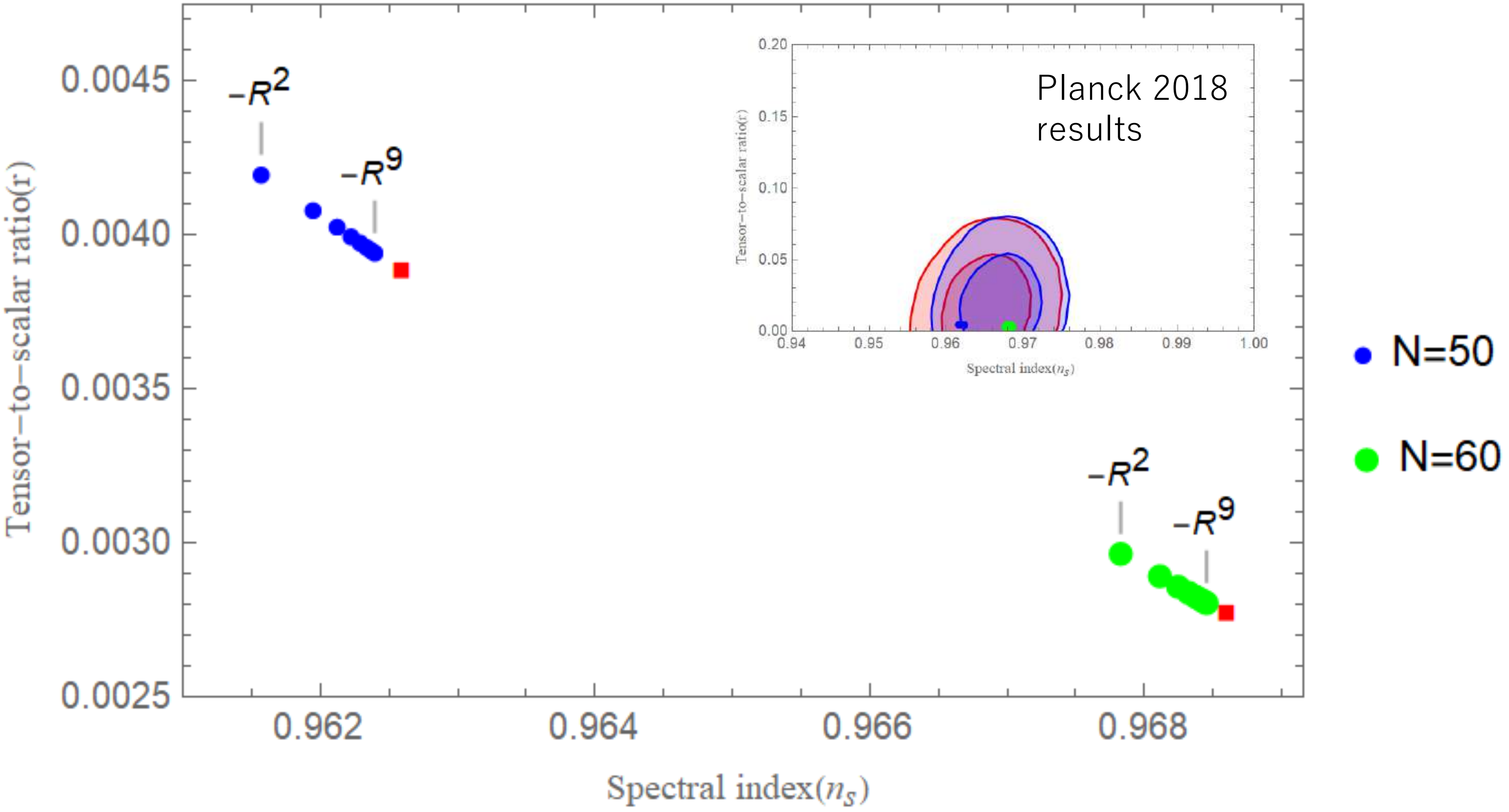
- スカラー・テンソル理論のポテンシャル

$$V(\phi) = -\frac{{M_{\mathrm{Pl}}}^2}{2} f(R)\big|_{R=R(\phi)}$$

$$= {M_{\mathrm{Pl}}}^2 M^2 \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\mathrm{Pl}}}}\right)^{1+\frac{1}{n-1}}$$



宇宙背景輻射の揺らぎ



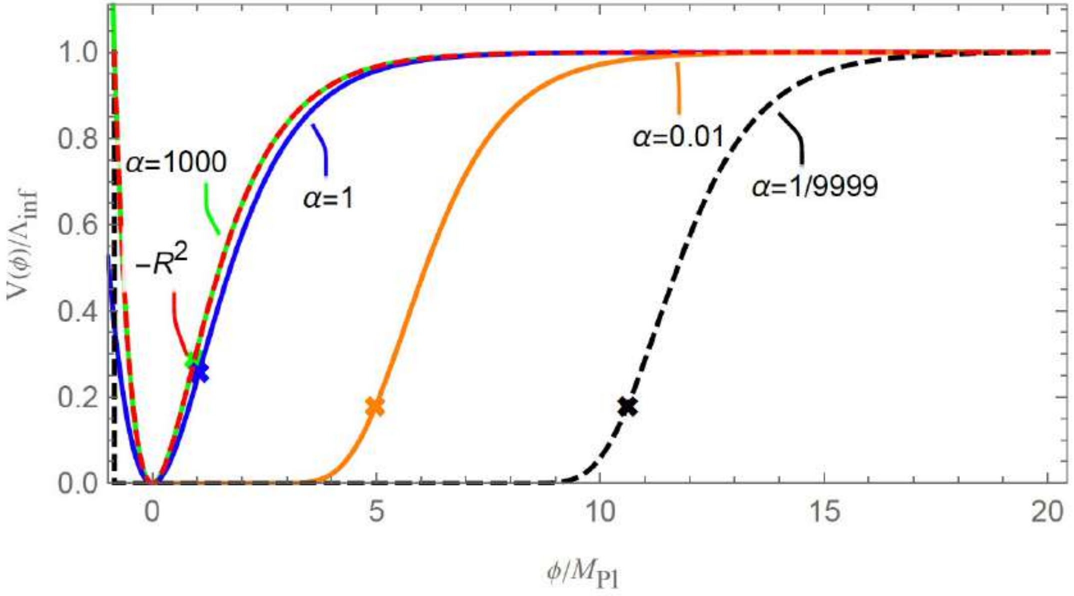
0.0045
0.0040
0.0035
0.0030
0.0025
Tensor−to−scalar ratio(r)
0.962
0.964
0.966
0.968
Spectral index(n_s)
$-R^2$
$-R^9$
$-R^2$
$-R^9$
Planck 2018
results
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0.94
0.95
0.96
0.97
0.98
0.99
1.00
N=50
N=60

対数関数模型 S. Nojiri, S. D. Odintsov (2014)

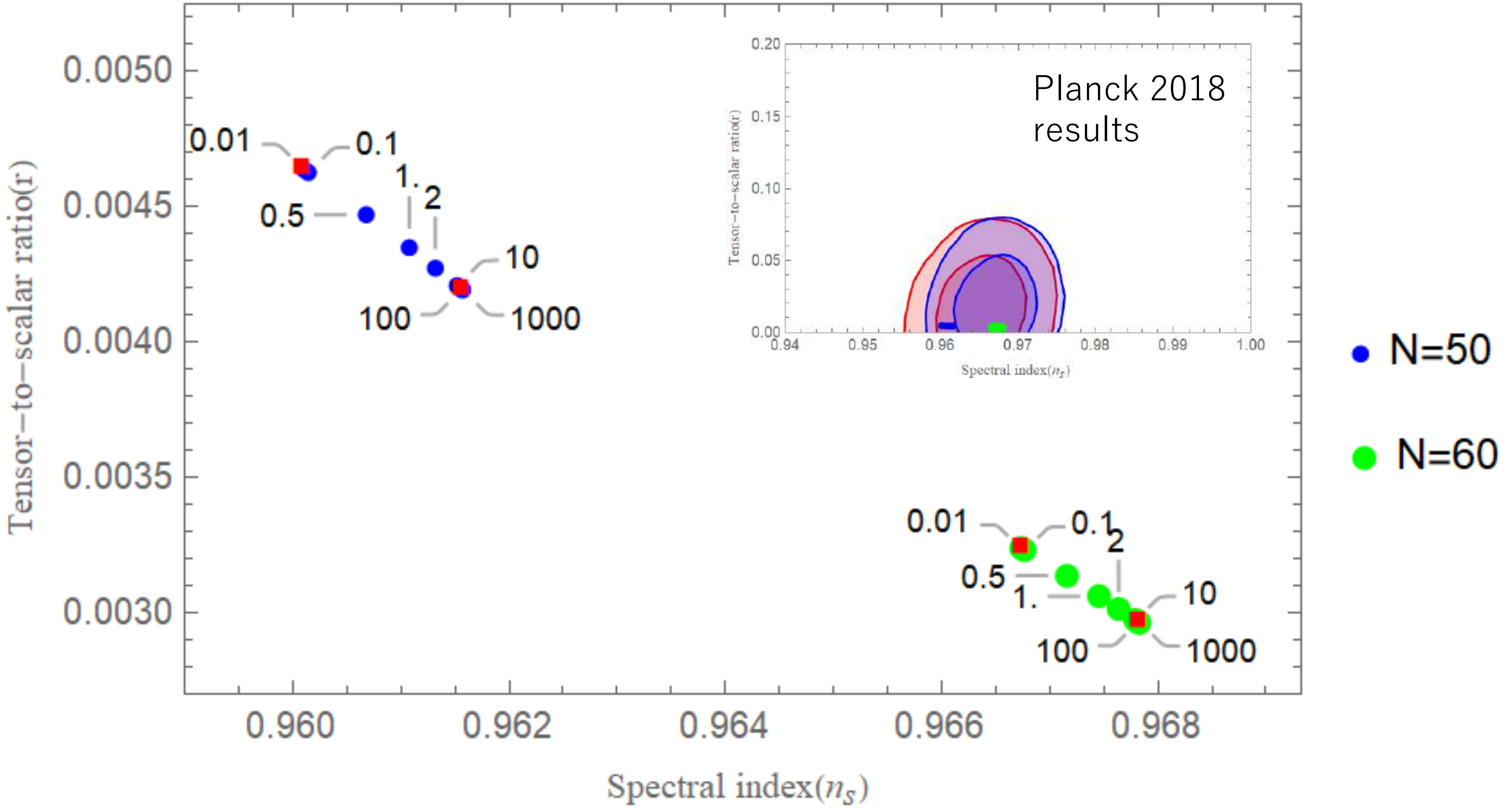
- 重力に関するラグランジアンの修正

$$F(R) = R - \alpha R \ln\left(\frac{R}{R_0} + 1\right)$$

- スカラー・テンソル理論のポテンシャル

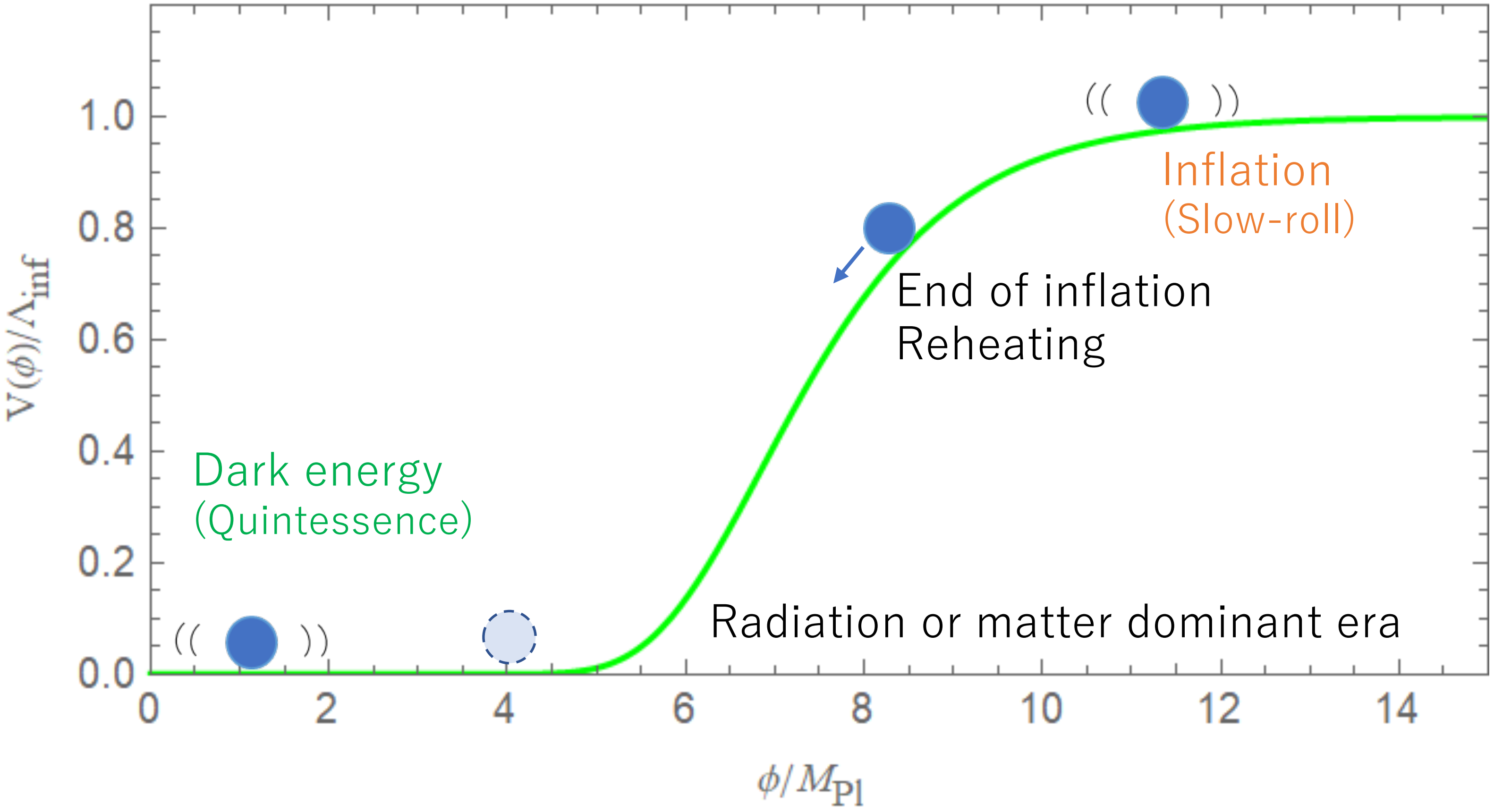


宇宙背景輻射の揺らぎ



Planck 2018
results
Tensor-to-scalar ratio(r)
Spectral index(n_s)
0.01
0.1
0.5
1.
2
10
100
1000
N=50
N=60

インフレーション期から現在まで

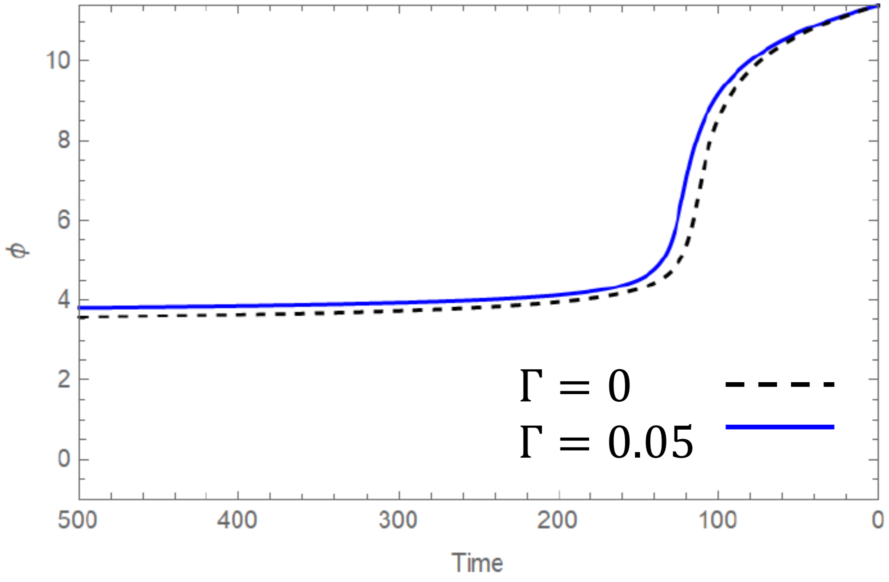


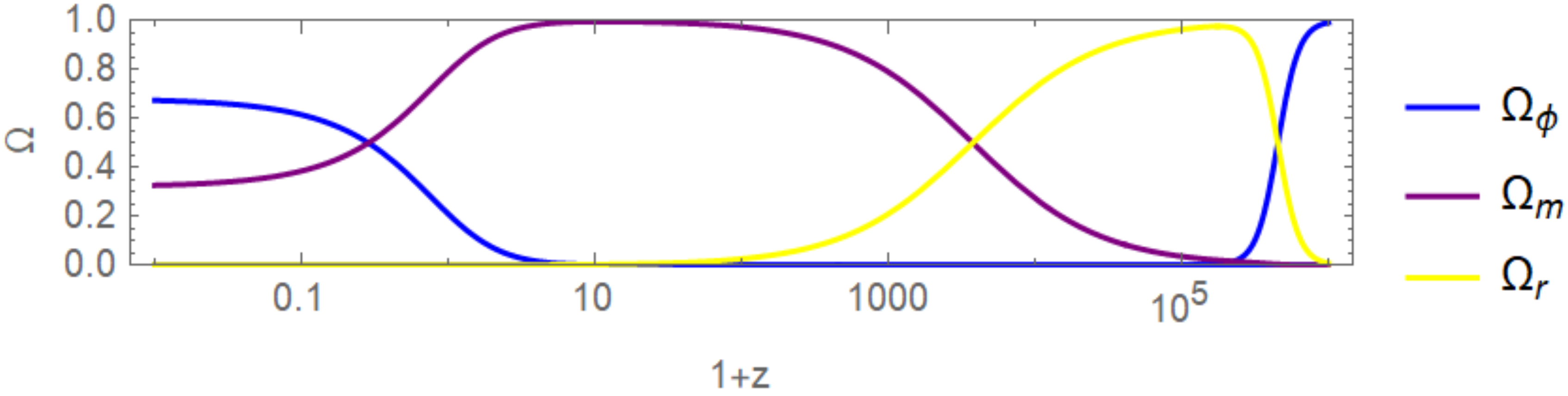
インフレーション期から現在まで

- スカラロンの運動

$$3H(t)^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$$

$$\ddot{\phi} + [3H(t) + \Gamma]\dot{\phi} + V'(\phi) = 0$$





最後に

まとめ

カルタン形式の修正重力理論について紹介した

- コンフォーマル変換なしに、同等なスカラー・テンソル理論に

  T. I., M. Taniguchi, Symmetry 14, 1830 (2022)

- インフレーションに適用し宇宙背景輻射の揺らぎを計算すると、広いパラメーターの範囲で観測と無矛盾

  T. I., H. Sakamoto, M. Taniguchi, arXiv:2304.14769 [gr-qc].

- インフレーション期と同時に現在の加速膨張（暗黒エネルギー）を説明できる

課題

- 物質（フェルミオン、光子、ヒグスなど）の導入と宇宙初期現象の系統的解析
  再加熱温度、密度揺らぎ、…
- 暗黒物質の候補としてのスカラロン
- 修正重力理論の一般化
- …